Ableitungen – alle Regeln

50 Übungsaufgaben mit Lösungen und Erklärungen · für Maria

Teil 1 · Aufgaben

Leite jeweils nach x ab. Wo es sich anbietet, vor dem Ableiten vereinfachen.

1 Grundregeln – Potenz-, Faktor- und Summenregel

1 $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + 7x - 2$

2 $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

3 $f(x) = \frac{2}{x^3} - 5\cdot\sqrt[3]{x}$

4 $f(x) = (x^2 - 3)(x + 1)$

5 $f(x) = \frac{4x^3 - x}{x}$

2 Produktregel

6 $f(x) = x^2\cdot e^x$

7 $f(x) = (3x + 1)\cdot\sin(x)$

8 $f(x) = \sqrt{x}\cdot\ln(x)$

9 $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2x)$

10 $f(x) = x\cdot e^x\cdot\sin(x)$ *(3 Faktoren)*

3 Quotientenregel

11 $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$

12 $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

13 $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

14 $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

15 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

4 Kettenregel

16 $f(x) = (3x^2 - 5)^4$

17 $f(x) = e^{-2x + 1}$

18 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

19 $f(x) = \sqrt{4x - 7}$

20 $f(x) = \sin(3x^2)$

21 $f(x) = e^{\sin(x)}$

5 Exponential- und Logarithmusfunktionen

22 $f(x) = 5\cdot e^{3x}$

23 $f(x) = x\cdot\ln(x) - x$

24 $f(x) = \ln(\sqrt{x})$

25 $f(x) = 2^x$

26 $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$

27 $f(x) = \log_3(x)$

6 Trigonometrische Funktionen

28 $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

29 $f(x) = \tan(x)$

30 $f(x) = \sin^2(x)$

31 $f(x) = \cos(2x + \pi/3)$

32 $f(x) = x^2\cdot\cos(x)$

7 Kombinierte Regeln

33 $f(x) = (x^2 + 1)^3 \cdot e^{-x}$

34 $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

35 $f(x) = \sqrt{\sin(2x)}$

36 $f(x) = e^{x^2} \cdot \ln(3x)$

37 $f(x) = \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^3$

8 Höhere Ableitungen

38 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2 \rightarrow f', f'', f'''$

39 $f(x) = e^{2x} \rightarrow$ Formel für $f^{(n)}$

40 $f(x) = \sin(x) \rightarrow f^{(2026)}$

41 $f(x) = \ln(x) \rightarrow f', f'', f'''$

9 Spezialtechniken

Zusatz

42 $f(x) = x^x$ *(log. Differenzieren)*

43 $f(x) = x^{\sin(x)}$

44 Implizit: $x^2 + y^2 = 25 \rightarrow y'$

45 Implizit: $x^3 + y^3 = 6xy \rightarrow y'$

46 $f(x) = \arctan(x)$ *(Umkehrfunktion)*

10 Partielle Ableitungen

Zusatz

47 $f(x,y) = x^2y + 3y^3$

48 $f(x,y) = e^{xy}$

49 $f(K,L) = K^{0,3} \cdot L^{0,7}$

50 $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

Teil 2 · Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei Abweichungen: Zwischenschritte prüfen, nicht nur das Endergebnis.

1 Grundregeln

1 $f' = 15x^4 - 12x^2 + 7$

2 $f' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$

3 $f' = -\frac{6}{x^4} - \frac{5}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$

4 ausmultipliziert: $x^3 + x^2 - 3x - 3 \to f' = 3x^2 + 2x - 3$

5 gekürzt: $4x^2 - 1 \to f' = 8x$ *(D: $x \neq 0$)*

2 Produktregel

6 $f' = 2x\cdot e^x + x^2e^x = e^x(x^2 + 2x)$

7 $f' = 3\cdot\sin(x) + (3x + 1)\cdot\cos(x)$

8 $f' = \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

9 $f' = 5x^4 - 3x^2 - 2$

10 $f' = e^x(\sin x + x\cdot\sin x + x\cdot\cos x)$

3 Quotientenregel

11 $f' = \frac{-7}{(x - 3)^2}$

12 $f' = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$

13 $f' = \frac{x\cdot\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$

14 $f' = \frac{e^x(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$

15 $f' = \frac{16x}{(x^2 + 4)^2}$

4 Kettenregel

16 $f' = 24x(3x^2 - 5)^3$

17 $f' = -2\cdot e^{-2x + 1}$

18 $f' = \frac{2x}{x^2 + 1}$

19 $f' = \frac{2}{\sqrt{4x - 7}}$

20 $f' = 6x\cdot\cos(3x^2)$

21 $f' = \cos(x)\cdot e^{\sin(x)}$

5 Exponential- und Logarithmusfunktionen

22 $f' = 15\cdot e^{3x}$

23 $f' = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$

24 $\ln(\sqrt{x}) = ½\cdot\ln(x) \to f' = \frac{1}{2x}$

25 $f' = 2^x\cdot\ln(2)$

26 $f' = \frac{e^{x^2}(2x^2 - 1)}{x^2}$

27 $f' = \frac{1}{x\cdot\ln(3)}$

6 Trigonometrische Funktionen

28 $f' = \cos(x) - \sin(x)$

29 $f' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

30 $f' = 2\cdot\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$

31 $f' = -2\cdot\sin(2x + \pi/3)$

32 $f' = 2x\cdot\cos(x) - x^2\cdot\sin(x)$

7 Kombinierte Regeln

33 $f' = 3(x^2+1)^2\cdot 2x\cdot e^{-x} - (x^2+1)^3e^{-x} = e^{-x}(x^2+1)^2(6x - x^2 - 1)$

34 erst zerlegen: $\ln(x+1) - \ln(x-1) \to f' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{-2}{x^2-1}$

35 $f' = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$

36 $f' = e^{x^2}(2x \cdot \ln(3x) + \frac{1}{x})$

37 $f' = 3(\frac{2x-1}{x+2})^2 \cdot \frac{5}{(x+2)^2} = \frac{15(2x-1)^2}{(x+2)^4}$

8 Höhere Ableitungen

38 $f' = 4x^3 - 6x$, $f'' = 12x^2 - 6$, $f''' = 24x$

39 $f^{(n)} = 2^n \cdot e^{2x}$

40 $2026 : 4 = 506$ Rest $2 \to f^{(2026)} = -\sin(x)$

41 $f' = \frac{1}{x}$, $f'' = -\frac{1}{x^2}$, $f''' = \frac{2}{x^3}$

9 Spezialtechniken

42 $\ln(f) = x \cdot \ln(x) \to \frac{f'}{f} = \ln(x) + 1 \to f' = x^x(\ln(x) + 1)$

43 $f' = x^{\sin(x)}(\cos(x) \cdot \ln(x) + \frac{\sin(x)}{x})$

44 $2x + 2y \cdot y' = 0 \to y' = -\frac{x}{y}$

45 $3x^2 + 3y^2y' = 6y + 6xy' \to y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$

46 $f' = \frac{1}{1+x^2}$

10 Partielle Ableitungen

47 $f_x = 2xy$, $f_y = x^2 + 9y^2$

48 $f_x = y \cdot e^{xy}$, $f_y = x \cdot e^{xy}$

49 $f_K = 0{,}3 \cdot K^{-0{,}7}L^{0{,}7}$, $f_L = 0{,}7 \cdot K^{0{,}3}L^{-0{,}3}$

50 $f_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$

Teil 3 · Die Verfahren erklärt

Jede Regel einmal kompakt: Formel, Idee, typischer Fehler.

1 · Potenzregel

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Idee: Der Exponent wandert als Faktor nach vorne, danach wird er um 1 kleiner. Das ist die Basis für fast alles Weitere.

Trick: Die Regel gilt auch für negative und gebrochene Exponenten – deshalb Brüche und Wurzeln vorher umschreiben: $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$.

Typischer Fehler: Bei x^{-3} wird der Exponent zu -4, nicht zu -2. Auch bei negativen Zahlen gilt „minus 1“.

2 · Faktor- und Summenregel

$$(c \cdot f)' = c \cdot f' \text{ und } (f \pm g)' = f' \pm g'$$

Idee: Konstante Vorfaktoren bleiben einfach stehen. Eine Summe wird Summand für Summand abgeleitet – man darf also jeden Term einzeln behandeln.

Merke: Eine reine Zahl ohne x hat die Ableitung 0 (waagerechte Gerade, keine Steigung).

3 · Produktregel

$$f = u \cdot v \rightarrow f' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Idee: Bei einem Produkt zweier x-haltiger Funktionen wird abwechselnd je ein Faktor abgeleitet und der andere stehen gelassen; beides wird addiert.

Sprechweise: „erste abgeleitet mal zweite *plus* erste mal zweite abgeleitet“. Bei drei Faktoren analog: jeder Faktor kommt einmal abgeleitet dran, drei Summanden.

Typischer Fehler: $u' \cdot v'$ – man darf nicht beide Faktoren gleichzeitig ableiten.

4 · Quotientenregel

$$f = \frac{u}{v} \rightarrow f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Idee: Wie die Produktregel, aber mit Minus im Zähler und dem quadrierten Nenner darunter.

Trick: Wenn der Nenner nur eine Potenz von x ist, ist Kürzen bzw. Umschreiben fast immer schneller: $\frac{4x^3 - x}{x} = 4x^2 - 1$.

Typischer Fehler: Reihenfolge im Zähler vertauschen. $u'v$ steht vorne – das Minus macht die Regel unsymmetrisch, ein Dreher ändert das Vorzeichen.

5 · Kettenregel

$$f(x) = u(v(x)) \rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Idee: „Äußere Ableitung mal innere Ableitung." Die innere Funktion ist das, was in der Klammer, unter der Wurzel oder im Exponenten steht – sie wird beim Ableiten der äußeren zunächst unverändert übernommen.

Vorgehen: Erst benennen: $u = (\ \dots\ )^4$, $v = 3x^2 - 5$. Dann $u' = 4(\ \dots\ )^3$, $v' = 6x$, und beides multiplizieren.

Typischer Fehler: Die innere Ableitung vergessen. $(3x^2-5)^4$ ergibt *nicht* $4(3x^2-5)^3$, sondern zusätzlich mal $6x$.

6 · Exponential- und Logarithmusfunktionen

$$(e^x)' = e^x \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x} \cdot (a^x)' = a^x \cdot \ln(a) \cdot (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

Idee: e^x ist die einzige Funktion, die sich beim Ableiten selbst reproduziert. Mit Kettenregel kombiniert entstehen die beiden wichtigsten Bausteine: $(e^{g(x)})' = g'(x) \cdot e^{g(x)}$ und $(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$.

Trick: Logarithmengesetze vor dem Ableiten anwenden – $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x)$ und $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$ sparen die Quotientenregel komplett.

7 · Trigonometrische Funktionen

$$\sin \rightarrow \cos \rightarrow -\sin \rightarrow -\cos \rightarrow \sin \cdot (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Idee: Sinus und Kosinus wiederholen sich beim Ableiten im Vierer-Zyklus. Nach vier Ableitungen ist man wieder am Anfang – das erklärt auch Aufgabe 40.

Typischer Fehler: Das Minus bei $(\cos x)' = -\sin x$ vergessen. Und bei $\sin(2x)$ die innere Ableitung 2 unterschlagen.

8 · Regeln kombinieren

Vorgehen: Immer von außen nach innen fragen: *Was ist die äußerste Struktur?* Ein Produkt, ein Quotient oder eine Verkettung? Diese Regel wird zuerst angesetzt; die einzelnen Bausteine werden danach – oft mit einer weiteren Regel – abgeleitet.

Trick: Vor dem Ableiten vereinfachen. Ausmultiplizieren, kürzen und Logarithmengesetze machen viele Aufgaben deutlich kürzer. Am Ende gemeinsame Faktoren ausklammern – so wird das Ergebnis übersichtlich und Nullstellen sind direkt ablesbar.

9 · Höhere Ableitungen

$$f \rightarrow f' \rightarrow f'' \rightarrow f''' \rightarrow f^{(4)} \rightarrow \dots \rightarrow f^{(n)}$$

Idee: Einfach mehrfach hintereinander ableiten. f' beschreibt die Steigung, f'' die Krümmung – deshalb braucht man f'' bei Extrem- und f''' bei Wendestellen.

Trick: Bei e-Funktionen und Sinus/Kosinus entsteht ein Muster. Statt 2026-mal abzuleiten, sucht man die Periode (bei sin/cos: 4) und rechnet mit dem Rest der Division.

10 · Spezialtechniken

Zusatz

Logarithmisches Differenzieren: Steht x sowohl in der Basis als auch im Exponenten (x^x), hilft keine der bekannten Regeln. Man logarithmiert beide Seiten, leitet ab – links entsteht $\frac{f'}{f}$ – und multipliziert am Ende mit f zurück.

Implizites Differenzieren: Wenn die Gleichung nicht nach y aufgelöst ist, behandelt man y als Funktion von x. Jedes y liefert beim Ableiten über die Kettenregel ein y'; anschließend sortiert man alle y'-Terme auf eine Seite und löst nach y' auf.

Umkehrfunktionen: Aus dem Zusammenhang $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$ folgen die Standardergebnisse $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ und $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

11 · Partielle Ableitungen

Zusatz

$f(x,y) \rightarrow f_x$: nur nach x ableiten, y als Zahl behandeln

Idee: Bei mehreren Variablen leitet man nach einer davon ab und tut so, als wäre jede andere eine feste Zahl. Aus $3y^3$ wird beim Ableiten nach x also 0, aus x^2y wird $2xy$.

Anwendung: In den Wirtschaftswissenschaften stecken dahinter die Grenzproduktivitäten – z. B. bei der Cobb-Douglas-Funktion aus Aufgabe 49.